Universidad Simón Bolívar.
Matemáticas II (MA-1112).
Enero – marzo 2013.
christianlaya@hotmail.com ; @ChristianLaya

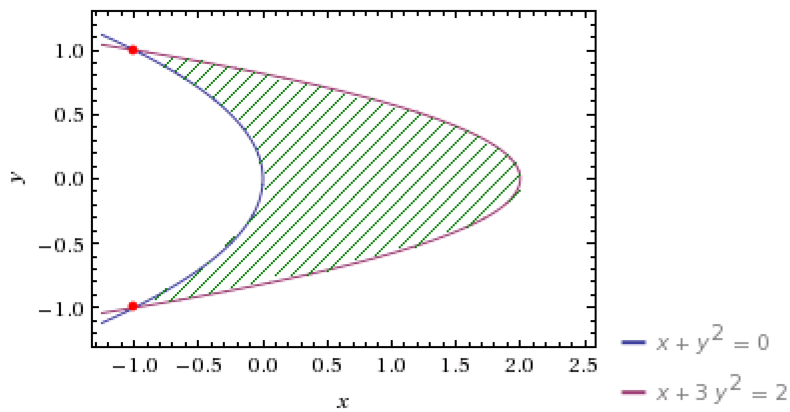
Segundo examen parcial (35%)
Soluciones

1. *Dibuje la región del plano acotada entre las curvas:*

$$x + y^2 = 0 \text{ y } x + 3y^2 = 2$$

Y calcule su área.

Graficamos la región:



Integramos respecto al eje y, para ello, identificamos las funciones:

$$f(y) = -y^2, \qquad g(y) = 2 - 3y^2$$

Tales que se cumpla: $x = f(y)$ *y* $x = g(y)$.

Hallamos la intercepción entre ambas curvas:

$$-y^2 = 2 - 3y^2 \Longrightarrow 2y^2 = 2 \Longrightarrow y^2 = 1 \Longrightarrow y = \pm 1$$

Vemos que la región puede ser separada en dos debido a que es simétrica, es decir, las regiones comprendidas en el intervalo [0,1] y [-1,0] tienen igual área. Calculamos una de ellas:

$$A_1 = \int_0^1 \left((2 - 3y^2) - (-y^2)\right)dy = \int_0^1 (2 - 3y^2 + y^2)dy = \int_0^1 (2 - 2y^2)dy = 2\int_0^1 (1 - y^2)dy$$

$$= 2\left(y - \frac{1}{3}y^3\right|_0^1 = 2\left(1 - \frac{1}{3}\right) - 2(0) = 2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

Finalmente, el área de la región, será:

$$A(R) = A_1 + A_2 = 2A_1 = 2\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

2. *Calcule la siguiente integral:*

$$\int_0^1 x^2 \ln(x+1)\, dx$$

Integramos por partes:

$$u = \ln(x+1) \Longrightarrow du = \frac{dx}{x+1}, \qquad dv = x^2 dx \Longrightarrow v = \frac{1}{3}x^3$$

$$\Longrightarrow \int_0^1 x^2 \ln(x+1)\, dx = \left(\frac{1}{3}x^3 \ln(x+1)\right|_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x^3\right)\left(\frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln(2) - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3}{x+1} dx$$

Resolvemos la integral mediante un cambio de variable: $k = x + 1 \Longrightarrow dk = dx$

$$x = 0 \Longrightarrow k = 1, \qquad x = 1 \Longrightarrow k = 2$$

$$= \int_1^2 \frac{(k-1)^3}{k} dk = \int_1^2 \frac{k^3 - 3k^2 + 3k - 1}{k} dk = \int_1^2 k^2 dk - 3\int_1^2 k dk + 3\int_1^2 dk - \int_1^2 \frac{dk}{k}$$

$$= \left(\frac{1}{3}k^3 - \frac{3}{2}k^2 + 3k - \ln|k|\right|_1^2 = \frac{5}{6} - \ln(2)$$

Finalmente:

$$\int_0^1 x^2 \ln(x+1)\, dx = \frac{1}{3}\ln(2) - \frac{1}{3}\left(\frac{5}{6} - \ln(2)\right) = \frac{2}{3}\ln(2) - \frac{5}{18}$$

3. *Calcule la siguiente integral:*

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{x} dx$$

Hacemos un cambio trigonométrico:

$$x = \sqrt{3}\sec(\theta) \Longrightarrow dx = \sqrt{3}\sec(\theta)\, tg(\theta) d\theta$$

$$= \int \frac{\sqrt{3\sec^2(\theta) - 3}}{\sqrt{3}\sec(\theta)}\left(\sqrt{3}\sec(\theta)\, tg(\theta)\right)d\theta = \int \sqrt{3} tg(\theta) tg(\theta) d\theta = \sqrt{3}\int tg^2(\theta)d\theta$$

$$= \sqrt{3}\int (\sec^2(\theta) - 1)d\theta = \sqrt{3}\int \sec^2(\theta)d\theta - \sqrt{3}\int d\theta = \sqrt{3}tg(\theta) - \sqrt{3}\theta + c$$

Finalmente:

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{x}dx = \sqrt{x^2 - 3} - \sqrt{3}arccsec\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c$$

4. *Calcule la siguiente integral:*

$$\int \frac{2x^2 + x + 3}{(x+1)(x^2+1)}dx$$

Aplicamos el método de fracciones simples:

$$\frac{2x^2 + x + 3}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} \Longrightarrow 2x^2 + x + 3 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x + 1)$$

$$\Longrightarrow 2x^2 + x + 3 = Ax^2 + A + Bx^2 + Bx + Cx + C$$

De lo que se obtiene:

$$2 = A + B, \qquad 1 = B + C, \qquad 3 = A + C$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos que:

$$C = 1, \qquad A = 2, \qquad B = 0$$

$$\int \frac{2x^2 + x + 3}{(x+1)(x^2+1)}dx = \int \frac{2}{x+1}dx + \int \frac{dx}{x^2+1} = 2\ln|x+1| + arctg(x) + c$$